

الدوال اللوغاريتمية

Logarithmes



1. تعريف:

الدالة الأصلية للدالة : $x \rightarrow \frac{1}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$ التي تنعدم في 1 تسمى

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ويرمز لها بالرمز $\ln$ أو $\log$

$$\ln(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (\ln(x))' = \frac{1}{x} \\ \ln(1) = 0 \end{cases}$$

2. خصائص:

لدينا :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$r \in \mathbb{R} \quad \ln(x)^r = r \ln(x)$$

$$\ln(1) = 0 \text{ و}$$

3. المشتقة:

f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث $f(x) \neq 0$

$$\forall x \in I \quad [\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

4. النهايات:

الدالة $\ln$ دالة متصلة و تزايدية على $]0; +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

5. الدالة اللوغاريتمية للأساس a

✓ لكل $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ الدالة $\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ المعرفة على $]0; +\infty[$ تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ويرمز لها

بالرمز $\log_a$

✓ إذا كان $a = e$ فإن دالة اللوغاريتم للأساس e هي دالة اللوغاريتم النيبيري .

✓ إذا كان $a = 10$ فإن الدالة تسمى دالة اللوغاريتم العشري .

• جميع خصائص دالة اللوغاريتم النيبيري تبقى صالحة لدالة اللوغاريتم للأساس a

$$\log_a(a) = 1 \quad ; \quad \log_a(1) = 0$$