

AYYADI Noureddine

ayyadi.n@hotmail.fr
Rabat.

Cours de Mathématiques.
Tronc commun scientifique B I.
Conforme au programme marocain.

Chapitre:3

L'ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$

Contenus du programme	Les capacités attendues	Recommandations pédagogiques
* Ordre et opérations. * La valeur absolue et ses propriétés. * Intervalles. * Encadrement, approximation et approximations décimales.	* Maîtriser les différentes techniques de comparaison de deux nombres (ou expressions) et utiliser la technique convenable selon la situation étudiée . * Représenter sur la droite numérique les différentes relations liées à l'ordre. * Reconnaître et déterminer avec une précision donnée, une approximation d'un nombre (ou d'une expression). * Effectuer des majorations ou des minorations d'expressions algébriques. * Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées d'un nombre réel.	* On devra développer et consolider l'habileté d'utilisation de l'ordre pour comparer des nombres et pour prouver certaines relations. * On devra entraîner les élèves à interpréter des relations de la forme $x - a \leq r$ et à majorer des expressions en utilisant l'inégalité triangulaire et les propriétés de la valeur absolue. Les élèves seront amenés à utiliser ces techniques fondamentales de manière progressive. * La notion de la valeur absolue devra être liée à la distance de deux points sur la droite graduée. * Les propriétés de l'encadrement et de l'approximation d'une somme et d'une différence de deux nombres peuvent être présentées dans le cas général, mais l'encadrement et l'approximation d'un produit et d'un quotient, devront être étudiés à partir d'exemples numériques bien choisis pour montrer aux élèves les précautions à prendre et les conditions à respecter, pour faire des raisonnements corrects. * La calculatrice est un outil qui pourra aider dans l'approche des notions précédentes (approximation et encadrement...), on devra s'assurer que les élèves maîtrisent l'écriture scientifique d'un nombre et qu'ils sont conscients des limites de l'usage de la calculatrice qui donne en général une valeur approchée décimale du résultat. On devra donc permettre aux élèves de s'approprier les techniques de la calculatrice scientifique (règles de priorités des opérations, fonctionnalités des touches ...).



ACTIVITÉS

1 Dans chaque cas, a et b sont deux réels strictement positifs.

Comparer A et B en étudiant le signe de $A - B$.

❶ $A = ab - 1$ et $B = (a + 1)(b + 1)$ ❷ $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ et $B = 2$.	❸ $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $B = \frac{4}{a + b}$ ❹ $A = \frac{7a + 2b}{7a}$ et $B = \frac{8b}{7a + 2b}$
--	---

2 On considère les deux nombres : $x = 4\sqrt{48} + \sqrt{3} + \sqrt{32}$ et $y = \sqrt{50} + 2\sqrt{18} + 4\sqrt{27}$

- ❶ Montrer que $x - y = 5\sqrt{3} - 7\sqrt{2}$.
- ❷ Comparer les deux nombres $5\sqrt{3}$ et $7\sqrt{2}$.
- ❸ En déduire une comparaison entre x et y .

3 Soient x et y deux réels tels que $x > 0$ et $y < 0$. On pose $A = \frac{9x - 4y}{3x - 2y}$.
Montrer que $2 < A < 3$.

0.1 Ordre dans $\mathbb{R}$

DÉFINITION 1

Soient a et b deux réels.

- a) On dit que a est **supérieur ou égal** à b et on note $a \geq b$ si $a - b$ est positif.
- b) On dit que a est **inférieur ou égal** à b et on note $a \leq b$ si $a - b$ est négatif.

REMARQUE

Comparer a et b revient à étudier le signe de leur différence $a - b$.

EXEMPLES 1

1 $\frac{7}{8}$ est inférieur à $\frac{8}{9}$, car : $\frac{7}{8} - \frac{8}{9} = \frac{7 \times 9 - 8 \times 8}{8 \times 9} = -\frac{1}{72} < 0$.

2 Montrons qu'on a : $x^2 + 1 \geq 2x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

En effet, la différence des deux nombres est $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$, qui est positif car le carré d'un nombre est toujours positif, et par suite $x^2 + 1 \geq 2x$.

0.1.1 Ordre et addition.

THÉORÈME 1

Ordre et addition

i) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } a \leq b \text{ alors } a + c \leq b + c$$

Autrement dit: Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité **conserve** l'ordre.

ii) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } c \leq d \text{ alors } a + c \leq b + d. \quad (\text{Encadrement d'une somme}).$$

DÉMONSTRATION

ii) Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$, de plus $c \leq d$ alors $c + b \leq b + d$, et par transitivité on en déduit que $a + c \leq b + d$.

0.1.2 Ordre et multiplication.

PROPRIÉTÉ 1

$$1 \text{ Si } a \leq b \text{ et } c \geq 0 \text{ alors } ac \leq bc.$$

$$2 \text{ Si } a \leq b \text{ et } c \leq 0 \text{ alors } ac \geq bc.$$

$$3 \text{ Si } a \leq b \text{ et } c > 0 \text{ alors } \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}.$$

$$4 \text{ Si } a \leq b \text{ et } c < 0 \text{ alors } \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}.$$

Autrement dit: Multiplier (ou diviser) chaque membre d'une inégalité
 - par un même nombre **strictement positif, ne change pas** le sens de l'inégalité.
 - par un même nombre **strictement négatif, change** le sens de l'inégalité.

Achamel.info

PROPRIÉTÉ 2

Soient a, b, c et d des réels **positifs**.

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } c \leq d \text{ alors } a \times c \leq b \times d.$$

0.1.3 Ordre et inverse.

PROPRIÉTÉ 3

a et b étant deux nombres **strictement positifs**.

$$a \leq b \text{ signifie que } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

EXEMPLES 2

On compare les deux nombres $\frac{1}{2^{2016} - 2016}$ et $\frac{1}{2^{2016} - 2015}$.

On a $-2016 < -2015$, donc $2^{2016} - 2016 < 2^{2016} - 2015$ (car on a ajouté le même nombre aux deux membres de l'inégalité), et comme les deux nombres $2^{2016} - 2016$, $2^{2016} - 2015$ sont positifs alors $\frac{1}{2^{2016} - 2016} > \frac{1}{2^{2016} - 2015}$.

0.1.4 Inégalité sur les carrés et les racines carrées.**PROPRIÉTÉ 4**

Soient a et b deux nombres réels **positifs**, on a :

$$a \leq b \quad \text{équivalent à} \quad a^2 \leq b^2.$$

Autrement dit : Le passage au carré conserve l'ordre pour les nombres positifs.

DÉMONSTRATION

On sait que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Comme a et b sont positifs, $a + b$ est aussi positif et on en déduit que $a - b$ et $a^2 - b^2$ sont de même signe.

D'où :

❶ Si $a \leq b$ alors $a - b \leq 0$, donc $a^2 - b^2 \leq 0$, et par suite $a^2 \leq b^2$.

❷ Si $a^2 \leq b^2$ alors $a^2 - b^2 \leq 0$, donc $a - b \leq 0$, et par suite $a \leq b$.

EXEMPLES 3

Comparons les deux nombres $2\sqrt{5}$ et $3\sqrt{2}$.

On a $(2\sqrt{5})^2 = 20$ et $(3\sqrt{2})^2 = 18$, par conséquent $(3\sqrt{2})^2 \leq (2\sqrt{5})^2$ et comme les deux nombres sont positifs alors $3\sqrt{2} \leq 2\sqrt{5}$.

PROPRIÉTÉ 5

Soient a et b deux nombres réels **négatifs**, on a :

$$a \leq b \quad \text{équivalent à} \quad a^2 \geq b^2.$$

Autrement dit : Le passage au carré **inverse** l'ordre pour les nombres négatifs.

EXEMPLES 4

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $-5 \leq x \leq -2$, alors $(-5)^2 \geq x^2 \geq (-2)^2$, c'est à dire $25 \geq x^2 \geq 4$, d'où $4 \leq x^2 \leq 25$.

PROPRIÉTÉ 6

Soient a et b deux nombres réels **positifs**, on a :

$$a \leq b \quad \text{équivalent à} \quad \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

EXEMPLE 5

Comparons les deux nombres $\sqrt{\sqrt{3} + 17}$ et $\sqrt{\sqrt{2} + 11}$.

On a $3 \geq 2$ donc $\sqrt{3} \geq \sqrt{2}$, de plus $17 \geq 11$ donc $\sqrt{3} + 17 \geq \sqrt{2} + 11$ et d'après la propriété précédente on aura

$$\sqrt{\sqrt{3} + 17} \geq \sqrt{\sqrt{2} + 11}.$$

0.1.5 Encadrement.
DÉFINITION 2

Soient a, b , et x trois nombres réels.

On dit que a et b encadrent x lorsque

$$a \leq x \leq b.$$

Cette double inégalité est appelée **encadrement de x** d'amplitude $b - a$.

Exercice résolu.

On considère les nombres réels x, y , et z tels que:

$$2 \leq x \leq 4 \quad ; \quad -3 \leq y \leq 1 \quad ; \quad -1,5 \leq z \leq -0,5$$

Trouver un encadrement des nombres suivants:

$$x - y \quad ; \quad x \times y \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad \frac{x+2}{z}.$$

Correction:

1 Remarquons que $x - y = x + (-y)$.

On a $-3 \leq y \leq 1$

donc $-1 \leq -y \leq 3$

par suite $2 + (-1) \leq x + (-y) \leq 4 + 3$

càd $1 \leq x + (-y) \leq 7$

d'où $1 \leq x - y \leq 7$.

2 Comme $-1 \leq -y \leq 3$ il peut prendre les valeurs positives ou les valeurs négatives, c.à.d $-3 \leq y \leq 0$ ou $0 \leq y \leq 1$, donc on ne peut pas encadrer directement $x \times y$. C'est pour cela qu'on va distinguer deux cas.

1^{er} cas : Si $-3 \leq y \leq 0$ alors $0 \leq -y \leq 3$,

or $2 \leq x \leq 4$

donc $0 \times 2 \leq x \times (-y) \leq 3 \times 4$

càd $0 \leq x \times (-y) \leq 12$

càd $0 \leq -x \times y \leq 12$

d'où $-12 \leq x \times y \leq 0$

2^{ème} cas : Si $0 \leq y \leq 1$

alors $2 \times 0 \leq x \times y \leq 4 \times 1$

càd $0 \leq x \times y \leq 4$

Finalement $-12 \leq x \times y \leq 4$.

3 On a $2 \leq x \leq 4$

alors $4 \leq x^2 \leq 16$ (1)

on a $-1,5 \leq z \leq -0,5$

alors $(-0,5)^2 \leq z^2 \leq (-1,5)^2$

(on inverse les extrémités de l'encadrement car z est négatif.)

d'où $2,25 \leq z^2 \leq 2,25$ (2)

on a $-3 \leq y \leq 1$

donc $-3 \leq y \leq 0$ ou $0 \leq y \leq 1$

par suite $0 \leq y^2 \leq 9$ ou $0 \leq y^2 \leq 1$

d'où $0 \leq y^2 \leq 9$ (3).

En ajoutant membre à membre des doubles inégalités (1), (2) et (3), on obtient

$$4,25 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 27,25.$$

4 Remarquons que $\frac{x+2}{z} = (x+2) \times \frac{1}{z}$ on a $2 \leq x \leq 4$ donc $4 \leq x+2 \leq 6$ de plus $-1,5 \leq z \leq -0,5$ donc $0,5 \leq -z \leq 1,5$ d'où $\frac{1}{1,5} \leq \frac{1}{-z} \leq \frac{1}{0,5}$	càd $\frac{2}{3} \leq -\frac{1}{z} \leq 2$ alors $4 \times \frac{2}{3} \leq (x+2) \times (-\frac{1}{z}) \leq 6 \times 2$ càd $\frac{8}{3} \leq -\frac{x+2}{z} \leq 12$ d'où $-12 \leq \frac{x+2}{z} \leq -\frac{8}{3}$
--	--

REMARQUE

un produit $a \times b$ sera encadré par les produits minimum et maximum effectués sur les bornes de a et b .

Achamel.info

0.2 Intervalles de $\mathbb{R}$.

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$. On définit les différents intervalles de $\mathbb{R}$ de la façon suivante:

0.2.1 Intervalles bornés.

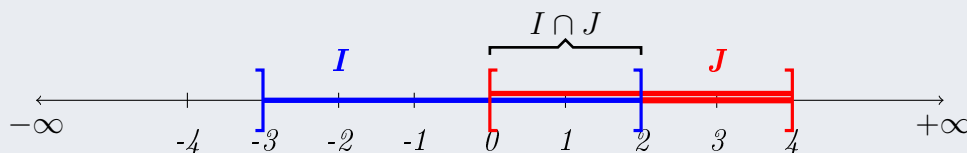
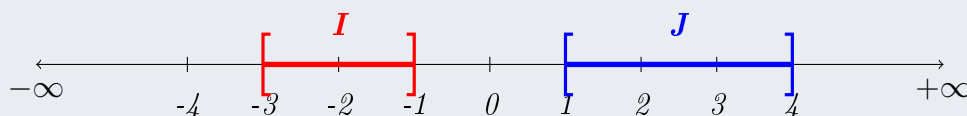
Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles bornés.

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[a; b]$ intervalle fermé	$a \leq x \leq b$	
$]a; b[$ intervalle ouvert	$a < x < b$	
$[a; b[$ intervalle semi-ouvert (ouvert en b)	$a \leq x < b$	
$]a; b]$ intervalle semi-ouvert (ouvert en a)	$a < x \leq b$	

0.2.2 Intervalles non bornés.

Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles non bornés.

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[a; +\infty[$	$x \geq a$	
$]a; +\infty[$	$x > a$	
$] - \infty; b]$	$x \leq b$	
$] - \infty; b[$	$x < b$	

EXEMPLES 6**1** $-3 \leq x \leq 7$ équivaut à $x \in [-3; 7]$.**2** $2 < x \leq 6$ équivaut à $x \in]2; 6]$.**3** $x \geq 3$ équivaut à $x \in [3; +\infty[$.**4** $x < -5$ équivaut à $x \in] - \infty; -5[$.**REMARQUES****1** $+\infty$ se lit "plus l'infini".**2** L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est l'intervalle $] - \infty; +\infty[$.**3** $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres.**4** L'ensemble vide ne contient aucun élément, il se note $\emptyset$.**0.2.3 Intersection d'intervalles.****DÉFINITION 3**Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.Les réels qui sont à la fois dans l'intervalle I et dans l'intervalle J sont dans l'intersection des intervalles I et J . Elle se note $I \cap J$. ($\cap$ se lit *inter*)**EXEMPLES****1** Déterminons $I \cap J$ avec $I =] - 3; 2]$ et $J = [0; 4]$.Pour visualiser cette intersection, on peut représenter les intervalles I et J sur un même axe gradué.L'intersection des deux intervalles est la zone de l'axe gradué où les deux couleurs se superposent. Ainsi $I \cap J = [0; 2]$.**2** Déterminons $I \cap J$ avec $I = [-3; -1]$ et $J = [1; 4]$. $I \cap J = \emptyset$, car les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun.

0.2.4 Réunion d'intervalles.

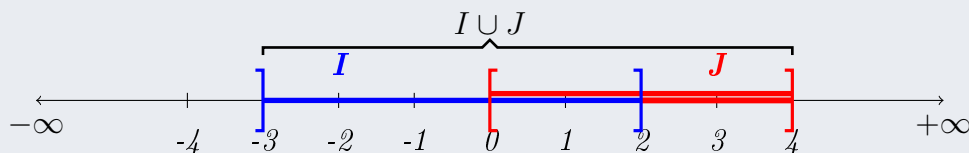
DÉFINITION 4

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Les réels qui sont dans l'intervalle I **ou** dans l'intervalle J sont dans **la réunion** des intervalles I et J . Elle se note $I \cup J$. ($\cup$ se lit **union**)

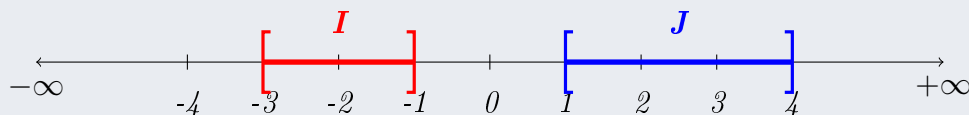
EXEMPLES

- 1 Déterminons $I \cup J$ avec $I =]-3; 2]$ et $J = [0; 4]$.



Les nombres de la réunion sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux intervalles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J . Ainsi $I \cup J =]-3; 4]$.

- 2 Déterminons $I \cup J$ avec $I = [-3; -1]$ et $J = [1; 4]$.



$$I \cup J = [-3; -1] \cup [1; 4].$$

Exercice:

À l'aide d'un schéma, déterminer l'intersection et la réunion des deux intervalles donnés:

1 $I = [-10, 2]$ et $J = [-3, 7]$

2 $I =]-\infty, 3]$ et $J = [-6, +\infty[$

3 $I = [7, +\infty[$ et $J = [-5, +\infty[$

4 $I =]3, 18]$ et $J =]17, 20]$

5 $I = \left[-\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right]$ et $J = \left[\frac{5}{7}, 1\right]$

6 $I = \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right]$ et $J = \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$

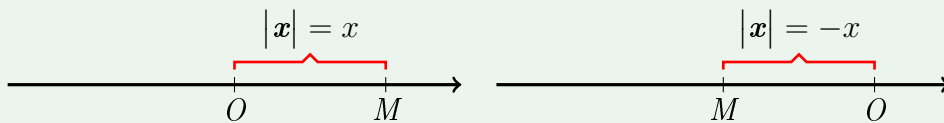
0.3 Valeur Absolue et distance.

0.3.1 Valeur Absolue.

DÉFINITION 5

Soit x un réel et M le point d'abscisse x de la droite des réels d'origine O .

La valeur absolue de x est **la distance** OM ; on note $|x| = OM$.



Et par suite:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

EXEMPLES

- 1 $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$, car $2 - \sqrt{3}$ est positif.
- 2 $|\sqrt{5} - 3| = -(\sqrt{5} - 3) = 3 - \sqrt{5}$, car $\sqrt{5} - 3$ est négatif.
- 3 $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

PROPRIÉTÉS

- 1 La valeur absolue d'un nombre est toujours **positive**: $|x| \geq 0$.
- 2 $\sqrt{x^2} = |x|$.
- 3 Un nombre et son opposé ont la même valeur absolue: $|x| = |-x|$.

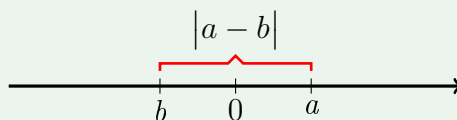
0.3.2 Distance entre deux réels.

DÉFINITION 6

Soient a et b deux réels.

A et B deux points de la droite réels respectivement d'abscisses a et b .

La distance entre a et b est la valeur absolue de leur différence: $AB = |a - b| = |b - a|$.



PROPRIÉTÉS

(Autres propriétés de la valeur absolue)

Soient x et y deux réels:

$$1 \quad |x - y| = |y - x|.$$

$$2 \quad |x \times y| = |x| \times |y|.$$

$$3 \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{avec } (y \neq 0)$$

$$4 \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$5 \quad |x| = a \text{ si et seulement si } \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a. \end{cases} \quad (\text{avec } a \geq 0)$$

$$6 \quad |x| = |y| \text{ si et seulement si } \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = -y. \end{cases}$$

EXEMPLES

1 Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $|x - 3| = 4$.

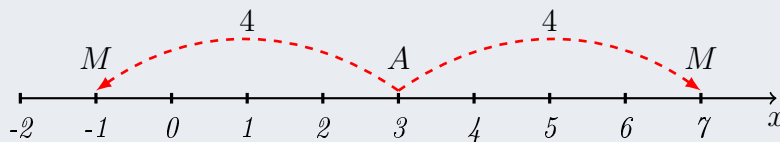
D'après la propriété 5), on a les égalités suivantes:

$$x - 3 = 4 \quad \text{ou} \quad x - 3 = -4$$

$$x = 4 + 3 \quad \text{ou} \quad x = -4 + 3$$

$$x = 7 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

2 **Interprétation graphique de cet résultat:** Soit A le point d'abscisse -1 sur la droite graduée des réels et M le point d'abscisse x . En termes de distance l'équation $|x - 3| = 4$ se traduit par $AM = 4$.



Exercice:

Trouver les réels x satisfaisant à la condition indiquée:

$$1 \quad |x - 3| = 2$$

$$2 \quad |4 - 3x| = 5$$

$$3 \quad |x + 4| = 1$$

$$4 \quad \left| x + \frac{1}{2} \right| = \frac{2}{3}$$

$$5 \quad |2x - 1| = |3x + 4|$$

$$6 \quad |x + 5| + |-2x + 1| = 0.$$

0.3.3 Valeur absolue et intervalle:

PROPRIÉTÉS

soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{*+}$.

$$1 \quad |x| \leq r \text{ si et seulement si } -r \leq x \leq r. \quad (\text{c.à.d. } x \in [-r; r]).$$

$$2 \quad |x| \geq r \text{ si et seulement si } x \leq -r \text{ ou } x \geq r. \quad (\text{c.à.d. } x \in]-\infty; -r] \cup [r; +\infty[).$$

EXEMPLES

Trouver les réels x satisfaisant à la condition indiquée:

1 On a

$$\begin{aligned}
 |x - 2| \leq \frac{3}{4} & \text{ signifie que } -\frac{3}{4} \leq x - 2 \leq \frac{3}{4} \\
 & \text{ signifie que } -\frac{3}{4} + 2 \leq x \leq \frac{3}{4} + 2 \\
 & \text{ signifie que } \frac{5}{4} \leq x \leq \frac{11}{4} \\
 & \text{ signifie que } x \in \left[\frac{5}{4}; \frac{11}{4} \right].
 \end{aligned}$$

2 On a

$$\begin{aligned}
 |2x - 1| > 3 & \text{ signifie que } 2x - 1 < -3 & \text{ ou } & 2x - 1 > 3 \\
 & \text{ signifie que } 2x < -3 + 1 & \text{ ou } & 2x > 3 + 1 \\
 & \text{ signifie que } 2x < -2 & \text{ ou } & 2x > 4 \\
 & \text{ signifie que } x < -1 & \text{ ou } & x > 2 \\
 & \text{ signifie que } x \in] -\infty; -1[\cup] 2; +\infty[.
 \end{aligned}$$

0.4 Les approximations:

DÉFINITION 7

Soit x un réel tel que $a \leq x \leq b$ ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x < b$ ou $a < x < b$.

- Le réel a est appelé **une valeur approchée par défaut** de x à $b - a$ près.
On peut dire aussi que a est une approximation par défaut de x d'amplitude $b - a$.
- Le réel b est appelé **une valeur approchée par excès** de x à $b - a$ près.
On peut dire aussi que b est une approximation par excès de x d'amplitude $b - a$.

EXEMPLES

1 On a $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$ donc

- $1,733$ est une valeur approchée par excès de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} car l'amplitude est $1,733 - 1,732 = 0,001 = 10^{-3}$.
- $1,732$ est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} .

2 Sachant que x est une valeur approchée par excès de $\frac{2}{3}$ à 2×10^{-1} près.

Montrons que $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{13}{15}$.

Il faut encadrer x entre deux nombres dont leur différence est $2 \times 10^{-1} = 0,1$ donc il suffit de prendre $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} + 0,1$ c-à-d $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{13}{15}$.

DÉFINITION 8

Soient x, a et r trois réels, r est positif.

Si $|x - a| \leq r$ ou $|x - a| < r$, on dit que a est une valeur approchée de x à r près.

EXEMPLE

On a $|\sqrt{5} - 2,23| \leq 0,01$ donc $2,23$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $0,01$ près.

DÉFINITION 9

Si x est un réel et N est un entier relatif alors il existe un entier naturel p tel que

$$N \times 10^{-p} \leq x \leq (N + 1) \times 10^{-p}.$$

- Le nombre décimal $N \times 10^{-p}$ est dit **approximation décimal par défaut** de x à 10^{-p} .
- Le nombre décimal $(N + 1) \times 10^{-p}$ est dit **approximation décimal par excès** de x à 10^{-p} .

EXEMPLE

On a $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$ ça veut dire que $1414 \times 10^{-3} \leq \sqrt{2} \leq 1415 \times 10^{-3}$
càd $1414 \times 10^{-3} \leq \sqrt{2} \leq (1414 + 1) \times 10^{-3}$.

Exercice résolu:

❶ a) Vérifier que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$ pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Montrer que si $|x| < \frac{1}{2}$ alors $\left| \frac{1}{1-x} - (1+x) \right| \leq 2x^2$.

❷ Déterminer une approximation de nombre $\frac{1}{0,99}$ à 2×10^{-4} près.

(On peut prendre $x = 10^{-2}$)

N.B: $\mathbb{R} - \{1\}$ est l'ensemble de tout les nombres réels sauf le nombre 1, et on peut écrire $\mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

Correction:

- ❶ a) Pour montrer une égalité, on n'est pas obligé de partir du côté gauche de l'égalité. Il est ici préférable de partir du côté droit de l'égalité, car on peut réduire l'expression $1 + x + \frac{x^2}{1-x}$ au même dénominateur. Pour tout nombre réel x de $\mathbb{R} - \{1\}$

on a:

$$\begin{aligned} 1 + x + \frac{x^2}{1-x} &= \frac{(1+x)(1-x) + x^2}{1-x} \\ &= \frac{1 - x^2 + x^2}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

b) Comme $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$
alors $\frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{x^2}{1-x}$

donc

$$\left| \frac{1}{1-x} - (1+x) \right| = \left| \frac{x^2}{1-x} \right| = \frac{|x^2|}{|1-x|}$$

d'où

$$\left| \frac{1}{1-x} - (1+x) \right| = \frac{x^2}{|1-x|} \quad (1)$$

donc il reste à majorer $\frac{1}{|1-x|}$.

On a

$$\begin{aligned} |x| < \frac{1}{2} & \quad \text{donc} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ & \quad \text{alors} \quad -\frac{1}{2} < -x < \frac{1}{2} \\ & \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2} < 1-x < \frac{3}{2} \\ & \quad \text{par suite} \quad \frac{2}{3} < \frac{1}{1-x} < 2 \\ & \quad \text{ainsi} \quad \frac{1}{|1-x|} < 2. \end{aligned}$$

Comme $x^2 \leq 0$ alors $\frac{x^2}{|1-x|} < 2x^2$.

D'après l'équation, (1) on en déduit que

$$\left| \frac{1}{1-x} - (1+x) \right| < 2x^2.$$

② D'après la question 1) b) si $|x| < \frac{1}{2}$

$$\text{alors} \quad \left| \frac{1}{1-x} - (1+x) \right| < 2x^2$$

et si on remplace x par 10^{-2} ($|10^{-2}| < \frac{1}{2}$), on obtient:

$$\left| \frac{1}{1-0,01} - (1+0,01) \right| < 2 \times (0,01)^2$$

c.à.d

$$\left| \frac{1}{0,99} - 1,01 \right| \leq 2 \times 10^{-4}.$$

D'où 1,01 est une valeur approchée de $\frac{1}{0,99}$ à 2×10^{-4} .

Exercices:

I)

1) Montrer que $|(1-2x)^3 - (1-6x)| = x^2|12-8x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Supposons que $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

a) Montrer que $|12-8x| \leq 16$.

b) En déduire que $|(1-2x)^3 - (1-6x)| \leq 16x^2$.

c) Déterminer une valeur approchée de $0,9998^3$ d'amplitude 16×10^{-8} .

II)

On pose $A = \sqrt{x^2+1} - |x|$ et $B = \sqrt{x^2+1} + |x|$

1) Montrer que $A > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; puis en déduire que $B > 2|x|$.

2) Calculer $A \times B$, puis en déduire que $A < \frac{1}{2|x|}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

3) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$; on a $|x| < \sqrt{x^2+1} < |x| + \frac{1}{2|x|}$.

4) Donner un encadrement de $\frac{\sqrt{122}}{3}$ d'amplitude $\frac{1}{66}$.

Bon courage.