

MATHÉMATIQUES

Terminale S

v 10/10

PRIMAIRE
COLLÈGE
LYCÉE
SUPÉRIEUR

Www.AdrarPhysic.Com

complétude 
soutien scolaire

donner envie d'apprendre

Sommaire

Partie A :	Résumés de cours	3
Chapitre I :	Limites et continuité de fonctions	4
I.	Limites et comportements asymptotiques	4
II.	Continuité	12
Chapitre II :	Dérivation et étude de fonctions	15
I.	Dérivation	15
II.	Etude de fonctions	19
Chapitre III :	Exponentielle, logarithme, puissance	22
I.	Fonction exponentielle	22
II.	Fonction logarithme	24
III.	Fonction puissance	26
IV.	Croissance comparée	27
Chapitre IV :	Intégrales, primitives, équations différentielles	29
I.	Intégrales	29
II.	Primitives	32
III.	Calcul d'intégrales	34
IV.	Equations différentielles	35
Chapitre V :	Suites numériques	37
I.	Généralités	37
II.	Raisonnement par récurrence	39
III.	Limites et convergence	39
Chapitre VI :	Dénombrements, probabilités et lois de probabilité	44
I.	Dénombrements	44
II.	Probabilités	49
III.	Lois de probabilité	53
Chapitre VII :	Les nombres complexes	55
I.	Présentation des nombres complexes	55
II.	Module d'un nombre complexe	57
III.	Equation du second degré	60
IV.	Nombres complexes et géométrie plane	61
Chapitre VIII :	Géométrie dans l'espace	64
I.	Produit scalaire dans l'espace	64
II.	Barycentre	67
III.	Droites de l'espace	68
IV.	Plans de l'espace	69
Chapitre IX :	Arithmétique (spécialité)	71
I.	Divisibilité dans $\mathbb{Z}$	71
II.	Les congruences	72
III.	Les nombres premiers	72
IV.	PGCD et PPCM	74
Chapitre X :	Sections planes de surfaces (spécialité)	76

I. Cylindre de révolution	76
II. Cône de révolution	78
III. Surface d'équation $z = x^2 + y^2$	79
IV. Surface d'équation $z = x y$	80
Chapitre XI : Similitudes planes (specialité)	82
I. Généralités	82
II. Similitudes	83
III. Similitude directe ou indirecte	84

Partie B : Enoncés des exercices 87

Chapitre I : Limites et continuité de fonctions	88
Chapitre II : Dérivation et étude de fonctions	91
Chapitre III : Exponentielle, logarithme, puissance	96
Chapitre IV : Intégrales, primitives, équations différentielles	100
Chapitre V : Suites numériques	107
Chapitre VI : Dénombrements, probabilités et lois de probabilité	113
Chapitre VII : Les nombres complexes	119
Chapitre VIII : Géométrie dans l'espace	124
Chapitre IX : Arithmétique (spécialité)	129
Chapitre X : Sections planes de surfaces (spécialité)	133
Chapitre XI : Isométries planes (spécialité)	136
Préparation au Bac	141

Partie C : Correction des exercices 145

Chapitre I : Limites et continuité de fonctions	146
Chapitre II : Dérivation et étude de fonctions	146
Chapitre III : Exponentielle, logarithme et puissance	147
Chapitre IV : Intégrales, primitives, équations différentielles	148
Chapitre V : Suites numériques	149
Chapitre VI : Dénombrements, probabilités et lois de probabilité	150
Chapitre VII : Nombres complexes	151
Chapitre VIII : Géométrie dans l'espace	151
Chapitre IX : Arithmétique (spécialité)	152
Chapitre X : Sections planes de surfaces (spécialité)	153
Chapitre XI : Similitudes planes (spécialité)	153

Partie A : RESUMES DE COURS

I. LIMITES ET COMPORTEMENTS ASYMPTOTIQUES

1° Limite en l'infini

a - Limite infinie en l'infini

Si, quand x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), $f(x)$ devient toujours plus grand en valeur absolue, on dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers plus (ou moins) l'infini, est plus (ou moins) l'infini.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Exemples : $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = -x$, $f(x) = -x^3$.

b - Limite finie en l'infini

Si, quand x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), $f(x)$ devient de plus en plus proche d'un réel L , on dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers plus (ou moins) l'infini est L .

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x} + 1$.

2° Limite en un point

a - Limite infinie en a

Si, quand x tend vers a , $f(x)$ devient toujours plus grand en valeur absolue, on dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a , est plus (ou moins) l'infini.

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Exemples : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $a = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 0$.

b - Limite finie en a

Si, quand x tend vers a , $f(x)$ devient de plus en plus proche d'un réel L , on dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a , est L .

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Exemple : $f(x) = 2x + 1$ en $a = 1$.

- Certaines fonctions n'admettent pas de limite. Par exemple les fonctions $x \rightarrow \cos x$ et $x \rightarrow \sin x$ n'admettent pas de limite en $+\infty$, ni en $-\infty$.
- Pour qu'une fonction f admette une limite en un réel a , il faut que f soit définie en a ou bien que a soit une borne de l'intervalle de définition de f .
- Pour qu'une fonction f admette une limite à l'infini, il faut nécessairement que f soit définie au moins sur un intervalle du type $[m ; +\infty[$ ou $]-\infty ; m]$ (m un réel).

3° Limites des fonctions usuelles

a - Fonctions usuelles

Les résultats suivants sont très souvent utilisés :

Si	$f(x) = x$	alors	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	
	$f(x) = x^2$			
	$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$			
	$f(x) = \sqrt{x}$		$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$	
Si	$f(x) = \frac{1}{x}$	alors	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	
	$f(x) = \frac{1}{x^2}$			
	$f(x) = \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$			
	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$			
Si	$f(x) = \frac{\sin x}{x}$	alors	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$	

4° Opérations algébriques sur les limites

Les limites peuvent être additionnées, multipliées ou divisées entre elles la plupart du temps sans problèmes.

Dans les paragraphes suivants, on considère deux fonctions f et g ayant respectivement une limite finie L et L' ou une limite infinie ($\pm \infty$) en a (où a est soit un réel, soit $\pm \infty$).

Le terme « **indéterminée** » signifie qu'il n'y a pas de règle générale permettant de conclure. Il convient alors de déterminer cette limite d'une autre façon, le plus souvent en tentant d'exprimer la fonction sous une autre forme. On dit que c'est une forme indéterminée.

a - Addition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini. Le tableau ci-dessous donne la limite de $f + g$ en ce même point ou à l'infini.

+		Lim g		
		L	$+\infty$	$-\infty$
Lim f	L'	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	indéterminée
	$-\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$



b - Multipliation

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini. Le tableau ci-dessous donne la limite de $f \times g$ en ce même point ou à l'infini.

×		Lim g			
		L	0	$+\infty$	$-\infty$
Lim f	L'	$L L'$	0	$+\infty$ si $L' > 0$ $-\infty$ si $L' < 0$	$-\infty$ si $L' > 0$ $+\infty$ si $L' < 0$
	0	0	0	indéterminée	indéterminée
	$+\infty$	$+\infty$ si $L > 0$ $-\infty$ si $L < 0$	indéterminée	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$ si $L > 0$ $+\infty$ si $L < 0$	indéterminée	$-\infty$	$+\infty$



c - Quotient

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I admettant une limite en un point a ou à l'infini. Le tableau ci-dessous donne la limite de $\frac{f}{g}$ en ce même point ou à l'infini.

$\div$		Lim f			
		$L \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
Lim g	$L' \neq 0$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$ si $L' > 0$ $-\infty$ si $L' < 0$	$-\infty$ si $L' > 0$ $+\infty$ si $L' < 0$
	0	$\pm\infty$	<i>indéterminée</i>	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	$+\infty$	0	0	<i>indéterminée</i>	<i>indéterminée</i>
	$-\infty$	0	0	<i>indéterminée</i>	<i>indéterminée</i>



d - Formes indéterminées

Les formes indéterminées sont au nombre de 4 : « $+\infty - \infty$ », « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $0 \times \infty$ ».



- Ils ne faut pas les confondre avec d'autre formes qui sont tout à fait connues telles que : « $\infty \times \infty = \infty$ », « $\frac{0}{\infty} = 0$ » et « $\frac{\infty}{0} = \infty$ ».
- Dans le cas d'indéterminations du type « $+\infty - \infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ », il faut dans la plupart des cas mettre le terme dominant en facteur.

Exemples : Les fonctions polynômes ou les fonctions rationnelles. On peut ainsi démontrer qu'en $\pm\infty$, **la fonction polynôme** a même limite que son terme de plus haut degré et **la fonction rationnelle** a même limite que le quotient des termes de plus haut degré.

- Pour lever l'indétermination d'une expression (somme ou soustraction) contenant une racine carrée $\sqrt{\quad}$, il suffit dans la plupart des cas de multiplier par l'expression conjuguée.

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1) \times (\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

5° Théorèmes de comparaison

Les théorèmes suivants permettent de trouver la limite d'une fonction f (en un point a ou en $\pm \infty$) par comparaison à d'autres fonctions $u, v, w, \dots$ dont on connaît la limite.

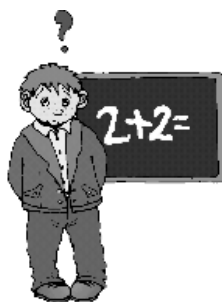
On désigne par ℓ un réel.

a - Théorème des gendarmes

- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour x proche de a et si u et v admettent la même limite ℓ en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

De même :

- Si $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ pour x proche de a et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.



Exemple : Limite en $+\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

Pour tout x réel : $-1 \leq \cos x \leq 1$ d'où : $\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

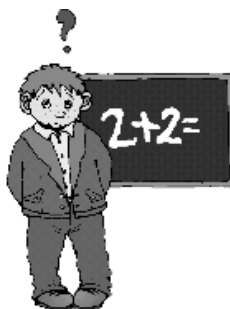
b - Comparaison à l'infini

- Si $u(x) \leq f(x)$ pour x proche de a et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x) \leq u(x)$ pour x proche de a et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

6° Limite d'une fonction composée

Soient a, b et ℓ désignant des réels ou $\pm \infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$.



Exemple : Etude de la limite en 0 de la fonction $f : x \rightarrow \frac{\sin(2x)}{x}$.

Pour tout x non nul, f s'écrit : $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} = 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x}$.

On applique le théorème : $\lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$,

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

7° Limites à gauche et à droite

a - Définition et notation

On dit que f admet ℓ (fini ou infini) comme **limite à gauche** en a (a réel), si la restriction de $f(x)$ à $] -\infty ; a]$ ou $] -\infty ; a [$ admet ℓ comme limite en a . On note : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \leq a}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \ell$.

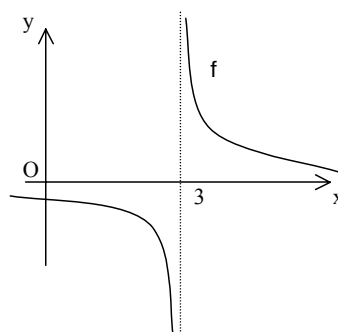
On définit de même la **limite à droite** et on note : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \geq a}} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \ell$.

Exemple :

La fonction f définie pour $x \neq 3$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \text{ n'a pas de limite en } 3.$$

On dit que f admet $-\infty$ comme limite à gauche et $+\infty$ comme limite à droite.



b - Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soient a un élément de I ou une borne de I et ℓ désignant un réel ou $\pm\infty$.

Si f est telle que $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \ell$, alors f admet ℓ comme limite en a .

8° Asymptote à une courbe et branche parabolique

On considère une fonction f définie sur un intervalle I . Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a - Asymptote à une courbe

 Asymptote verticale

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (a réel), alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f .

Exemple : Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, alors $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à C_f au voisinage de $+\infty$.

Asymptote horizontale

Dans le cas où la fonction admet une limite finie L quand x tend vers l'infini, on observe que la courbe représentative de la fonction se rapproche toujours davantage d'une droite horizontale sans jamais la toucher. On dit que la courbe de la fonction admet une asymptote horizontale.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ (ℓ réel), alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à C_f .

Exemple : Si $f(x) = \frac{1}{x} + 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. La droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$. On remarquera qu'elle est aussi asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$.

Asymptote oblique

Soient a et b deux réels. Si $f(x) = ax + b + \phi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f .

Exemple : Soit $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x} = 2x + 1 + \frac{1}{x}$. On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Donc la droite d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à C_f .

b - Branche parabolique

Lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, trois cas peuvent se présenter :

Branche parabolique de direction (Oy)

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique de direction (Oy).

Exemple : la fonction $x \rightarrow x^2 - \frac{1}{x}$

Branche parabolique de direction (Ox)

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe C_f admet une branche parabolique de direction (Ox)

Exemple : la fonction $x \rightarrow 3\sqrt{x} + 1$

 Branche parabolique de direction $y = ax$

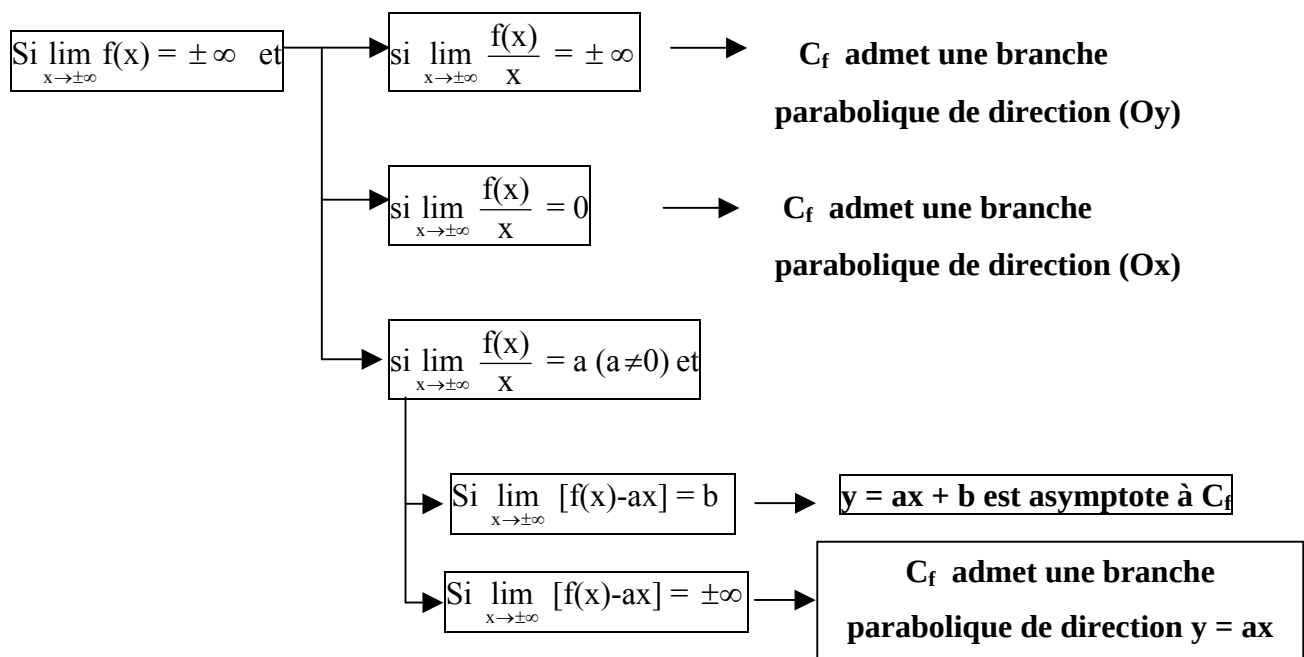
Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (a réel non nul) et si la courbe C_f n'admet pas d'asymptote, alors C_f admet une branche parabolique de direction $y = ax$.

Exemple : la fonction $x \rightarrow 2x + \sqrt{x}$ admet une branche parabolique de direction $y = 2x$.

c - En conclusion

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ (a réel) $\longrightarrow$ $x = a$ asymptote verticale à C_f

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$ (ℓ réel) $\longrightarrow$ $y = \ell$ est une asymptote horizontale à C_f



d - Position de la courbe par rapport à l'asymptote

Soient C_f la représentation graphique d'une fonction f d'équation $f(x)$ et C_g la représentation graphique d'une fonction g d'équation $g(x)$.

Pour étudier la position de la courbe C_f par rapport à C_g (au dessus ou au dessous), il suffit d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$. On notera que une des deux courbes peut être asymptote de l'autre.

- Si $f(x) - g(x) \geq 0$ alors C_f se trouve **au dessus de** C_g sur l'intervalle donné.
- Si $f(x) - g(x) \leq 0$ alors C_f se trouve **au dessous de** C_g sur l'intervalle donné.
- Si $f(x) = g(x)$ alors C_f est **confondue** avec C_g sur l'intervalle donné.

II. CONTINUITE

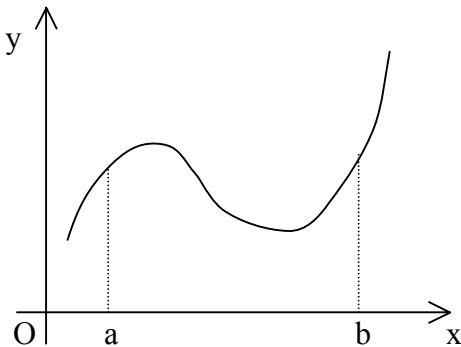
1° Définition d'une fonction continue

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a .

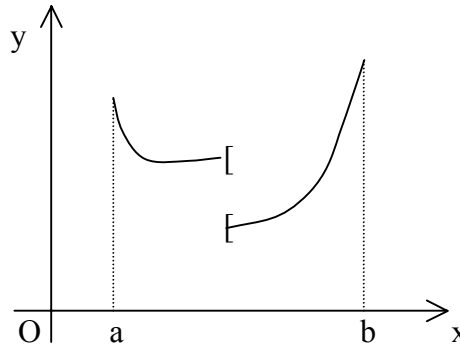
- f est **continue en un point a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- f est **continue sur l'intervalle I** si f est continue en tout point a de I .

Graphiquement, dire que f est continue sur I signifie que sa représentation graphique ne présente aucun point de rupture sur I : on peut la tracer « sans lever le crayon ».

Exemples :



Cette fonction est continue sur $[a ; b]$



Cette fonction n'est pas continue sur $[a ; b]$

Propriétés :

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

2° Opérations sur les fonctions continues

Si u et v sont continues sur I , alors $u + v$, $u \times v$ et u^n (n entier naturel non nul) sont continues sur I .

$\frac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.

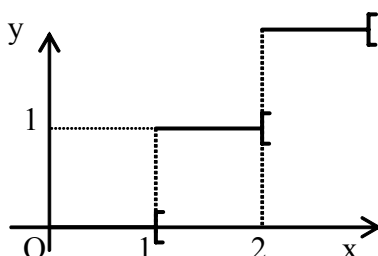
Si la fonction f est continue en a et si la fonction g est continue en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue en a .

3° Exemple de fonction non continue : la fonction partie entière

La partie entière de x , notée $E(x)$ est définie de la façon suivante :

Si $x \in [n; n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, alors $E(x) = n$.

Représentation graphique :

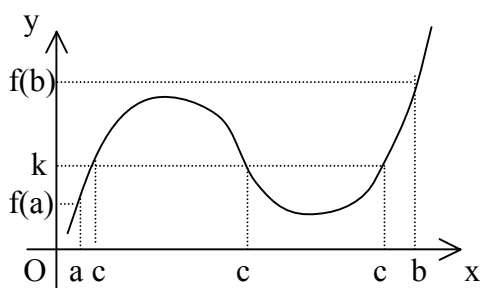


La fonction $E(x)$ est continue sur l'intervalle $[0,1[$, mais n'est pas continue sur l'intervalle $[0,2[$.

4° Théorème des valeurs intermédiaires

a - Énoncé

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Soient a et b deux réels dans I . Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

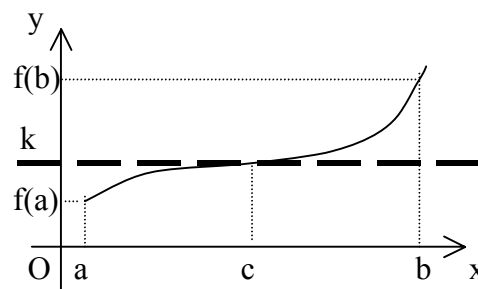


Ce théorème est utilisé pour prouver l'existence d'une solution d'une équation du type : $f(x) = k$.

b - Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue **strictement monotone** sur $[a ; b]$ (c'est à dire si $f'(x) > 0$ pour tout x de $[a ; b]$ ou si $f'(x) < 0$ pour tout x de $[a ; b]$), alors :

- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution c dans $[a ; b]$.
- L'image de $[a ; b]$ par f est l'intervalle $[f(a) ; f(b)]$. La fonction f réalise en fait une bijection de $[a ; b]$ sur $[f(a) ; f(b)]$ si f est croissante (ou $[f(b) ; f(a)]$ si f est décroissante).



Remarque : On admet que ce théorème se prolonge au cas où f est définie sur un intervalle ouvert $]a ; b[$ (a et b finis ou infinis) ou semi-ouvert $]a ; b]$ ou $[a ; b[$, dans le cas où les limites de f aux bornes de l'intervalle sont connues.



Ce théorème est utilisé pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$.

On peut ensuite calculer une valeur approchée de l'équation $f(x) = k$ par dichotomie ou balayage avec la calculatrice.

Théorème de la bijection réciproque:

Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur un intervalle $J = f(I)$. La bijection réciproque f^{-1} est aussi continue sur J et est monotone et de même sens de variation que f .

De plus, les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.