

Chapitre 5

PROJECTION D'UN POINT SUR UNE DROITE PARALLELEMENT à UNE AUTRE DROITE

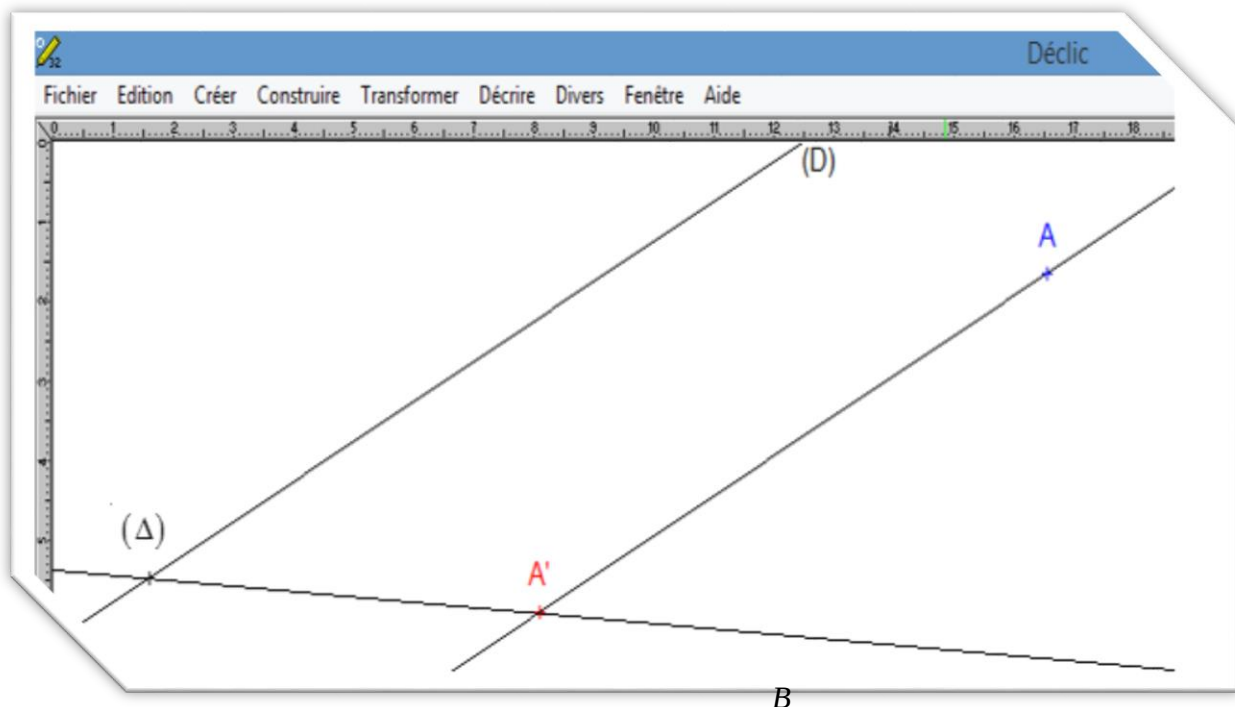
Compétences exigibles

- i. Définition
- ii. Théorème de Thales
- iii. Conservation de coefficient de colinéarité de 2 vecteurs

1 projection d'un point sur une droite parallèlement à une autre droite

Activité 1

On suppose les fils des rayons du soleil prennent la direction de la droite (D) et la droite (Δ) représente la surface du sol. L'ombre du point A sur le sol est le point A' l'intersection de la droite (Δ) avec la droite passant par A et parallèlement à la droite (D) . (voir figure ci contre).



2_ Vocabulaire

- Le point A' est appelé **projection du point A sur (Δ) parallèlement à (D)** .
- $B \in (\Delta)$: B est son propre projeté sur (Δ) parallèlement à (D) .

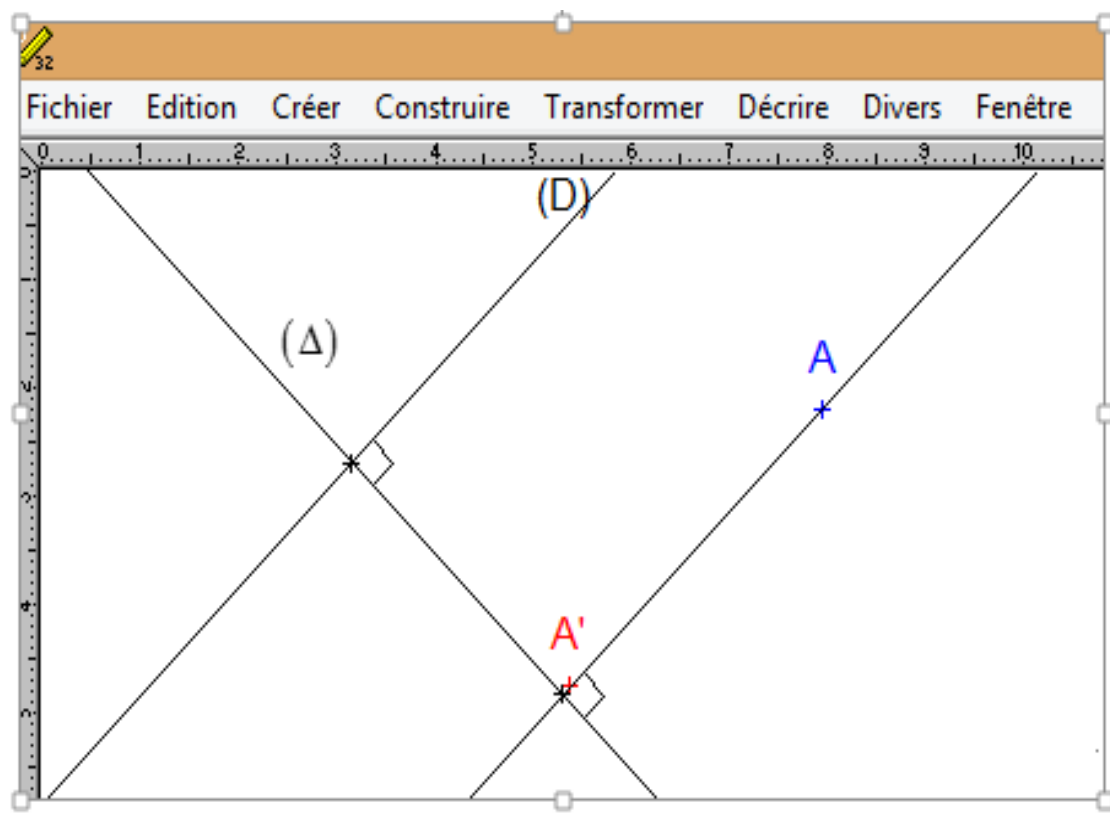
3_ Définition :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes et M un point du plan tel que $M \notin (\Delta)$.

Dire que le point M' est la projection du point M sur (Δ) parallèlement à (D) veut dire : $M' \in (\Delta)$ et $(MM') \parallel (D)$.

Cas particulier :

Si $(D) \perp (\Delta)$: A' est la projection orthogonale de A sur (Δ) .



4_ Application :

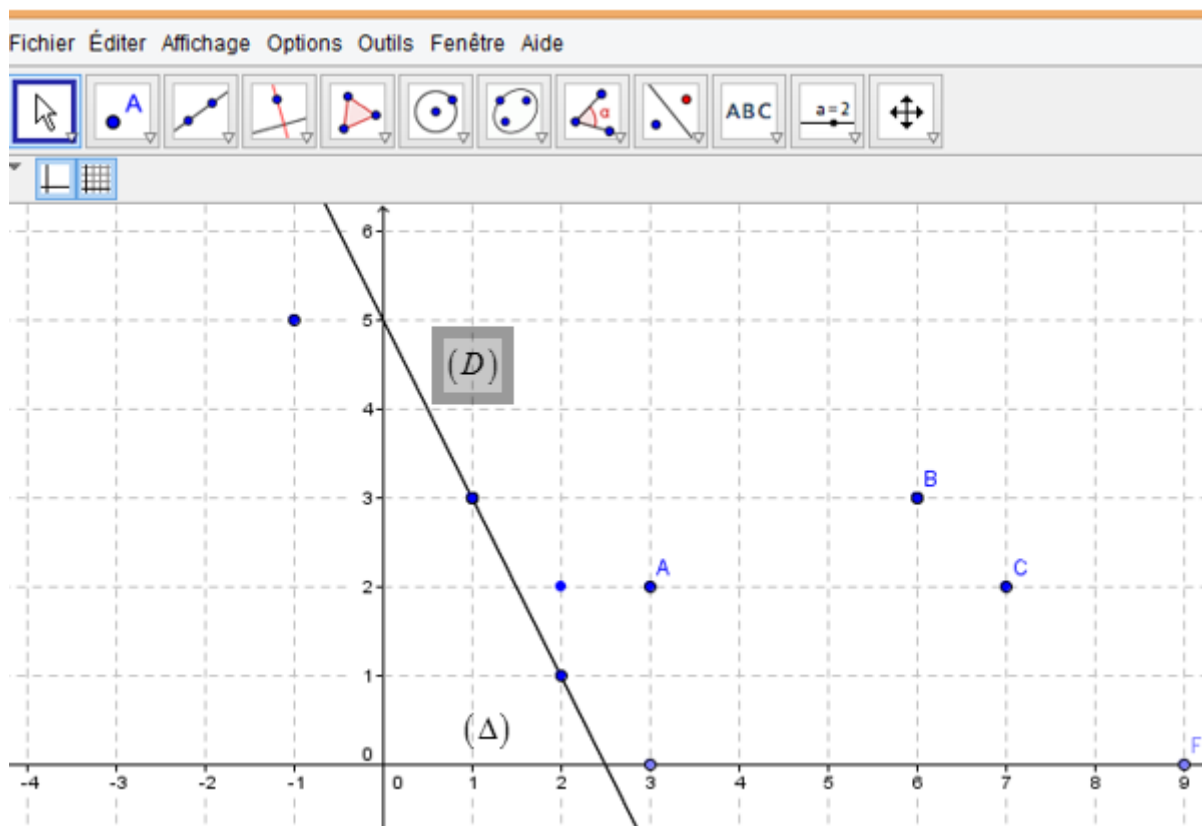
On considère (la figure ci contre)

Des points B, C, F sont alignés.

La droite (BC) est parallèle à (D) .

Les points E et F appartiennent à (Δ) .

- I. Déterminer les projections des points A, B, C, E, F sur (Δ) parallèlement à (D) .**
- II. Représenter les projections des points A, B, C, E, F sur (D) parallèlement à (Δ) .**
- III. Déterminer l'ensemble des points du plan dont la projection sur (Δ) parallèlement à (D) est le point F .**
- IV. Construire le point M tel que le point E est sa projection (Δ) parallèlement à (D) et que le quadrilatère $ECFM$ soit un parallélogramme.**



II_ Theoreme de Thalès

➤ **Théorème de Thalès Direct :**

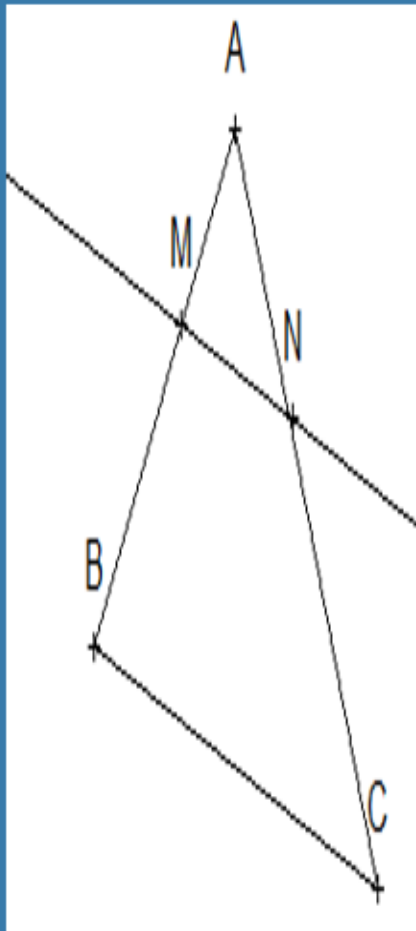
* A, B, M trois points alignés

* A, N, C trois points alignés

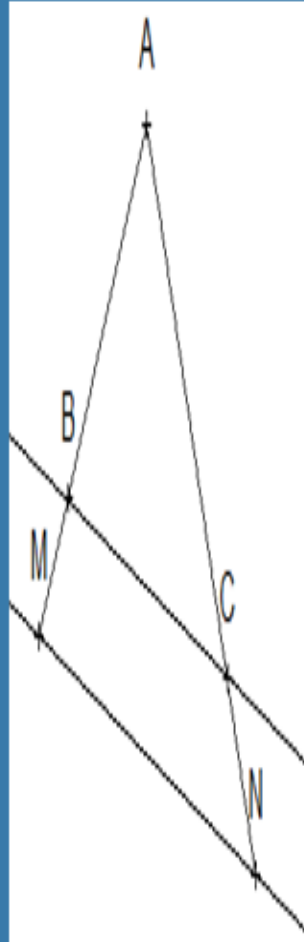
* $(MN) \parallel (BC)$

donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

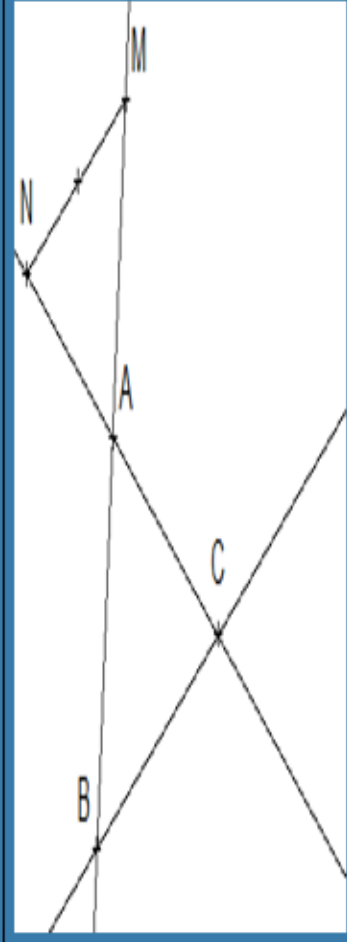
1 cas



2 cas



3 cas

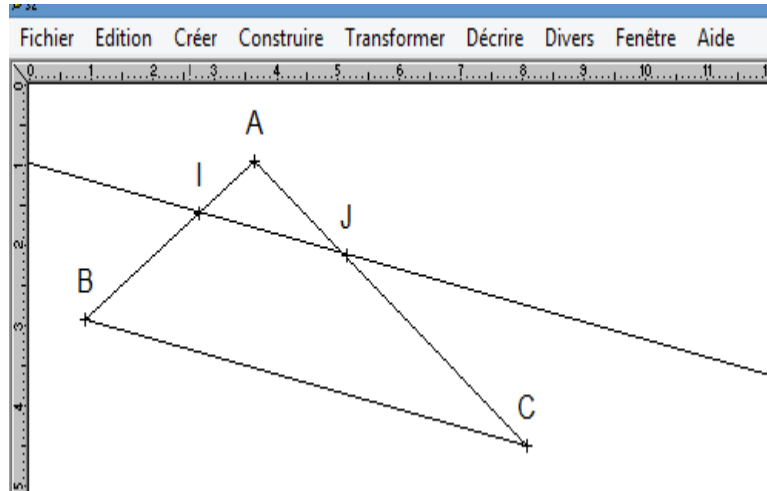


Application :

ABC triangle tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (IJ) \parallel (BC) \\ AI = 6 \text{ cm} ; AB = 18 \text{ cm} ; IJ = y \text{ cm} \\ AJ = 5 \text{ cm} ; AC = x \text{ cm} ; BC = 12 \text{ cm} \end{array} \right.$$

Voir figure



1. Enoncer le théorème de Thalès

2. A partir de l'égalité $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$ vérifier que $x = 19 \text{ cm}$

3. A partir de l'égalité $\frac{AI}{AB} = \frac{IJ}{BC}$ vérifier que $IJ = 4 \text{ cm}$

➤ **Réciproque du théorème de Thalès**

(méthode pour prouver si 2 droites sont parallèles

$\left\{ \begin{array}{l} * A, M, B \text{ points alignés} \\ * A, N, C \text{ points alignés} \\ * A, M, B \text{ sont dans le même ordre que } A, N, C \end{array} \right. \quad \text{conclusion : } (MN) \parallel (BC)$

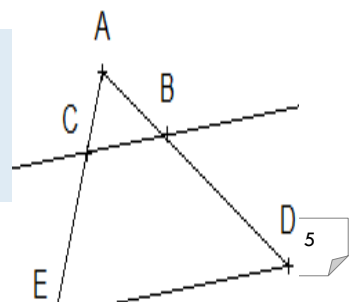
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Exercice résolu

$\left\{ \begin{array}{l} B \in [AD] ; C \in [AB] \\ AB = 4 \text{ cm} ; AD = 6 \text{ cm} \\ AC = 6 \text{ cm} ; AE = 9 \text{ cm} \end{array} \right.$

ADE un triangle telque

voir figure :



Montrons que : $(BC) \parallel (DE)$

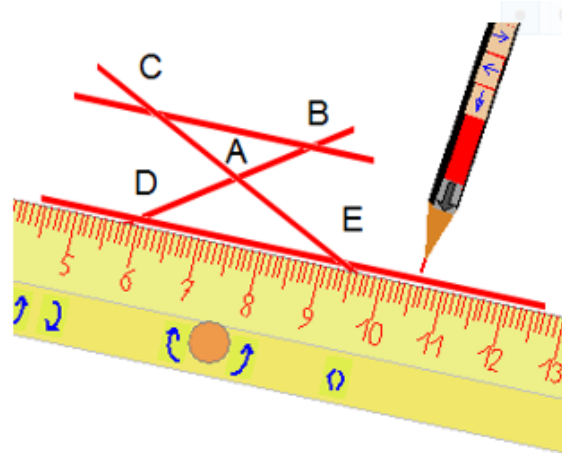
On a : **donc**

- * A, B, D sont alignés
- * A, C, E sont alignés
- * A, B, D sont dans le même ordre que A, C, E
- * $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{2}{3}$

donc : $(BC) \parallel (ED)$ **d'après la réciproque du théorème de Thalès**

exercice ; (voir figure ci contre) montrer que $(BC) \parallel (DE)$

$$\begin{cases} AB = 4,5 \text{ cm} ; AC = 30 \text{ cm} \\ AD = 33 \text{ cm} ; AE = 22 \text{ cm} \end{cases}$$



III_ Conservation du coefficient de colinéarité de 2 vecteurs

Activité :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en A . Les points M, N, P appartiennent à (Δ) tel que : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AC}$ et les points M', N', P' sont les projections respectives des points M, N, P sur (Δ) parallèlement à (BC) .

1. Faire une figure géométrique
2. En utilisant le théorème de Thalès établir que :

$$\frac{AM'}{AB} = 2 ; \frac{AN'}{AB} = 5 ; \frac{AP'}{AB} = 3$$

3. En déduire que $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN'} = 5\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AP'} = -3\overrightarrow{AB}$

Si $M \in (\Delta)$ et M' son projeté sur (D) parallèlement à (BC) tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AC}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelle conjecture peut-on dire à propos des 2 vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.



regle : (D) et (Δ) deux droites sécantes.

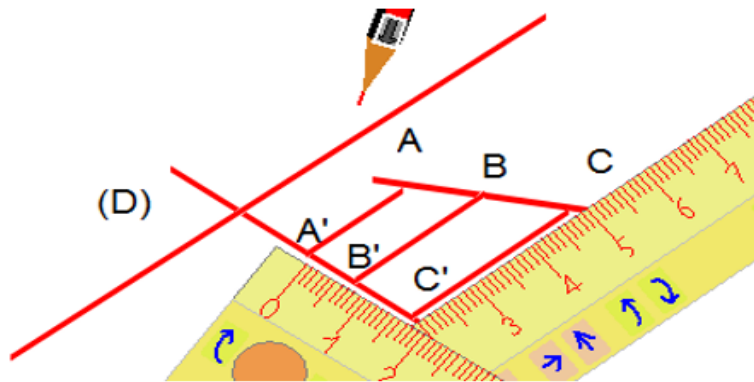
A, B, C, D des points du plan et A', B', C', D' leurs projections (resp) sur (D) parallèlement à (Δ) .

Si $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{A'C'}$

Si $\overrightarrow{CD} = k \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{C'D'} = k \overrightarrow{A'B'}$

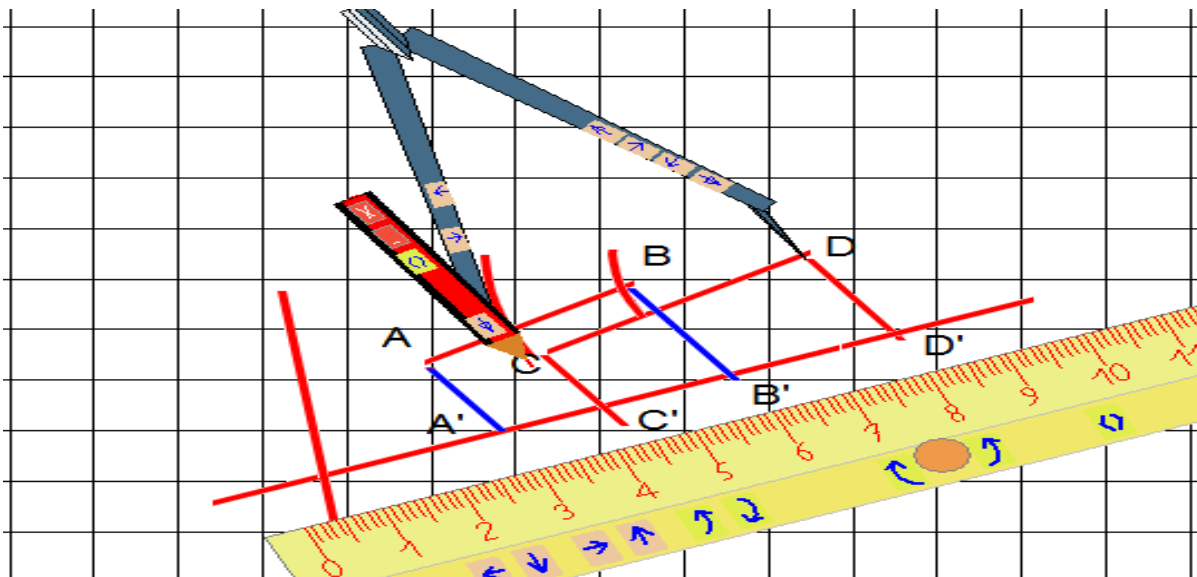
1 cas

si: $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}$

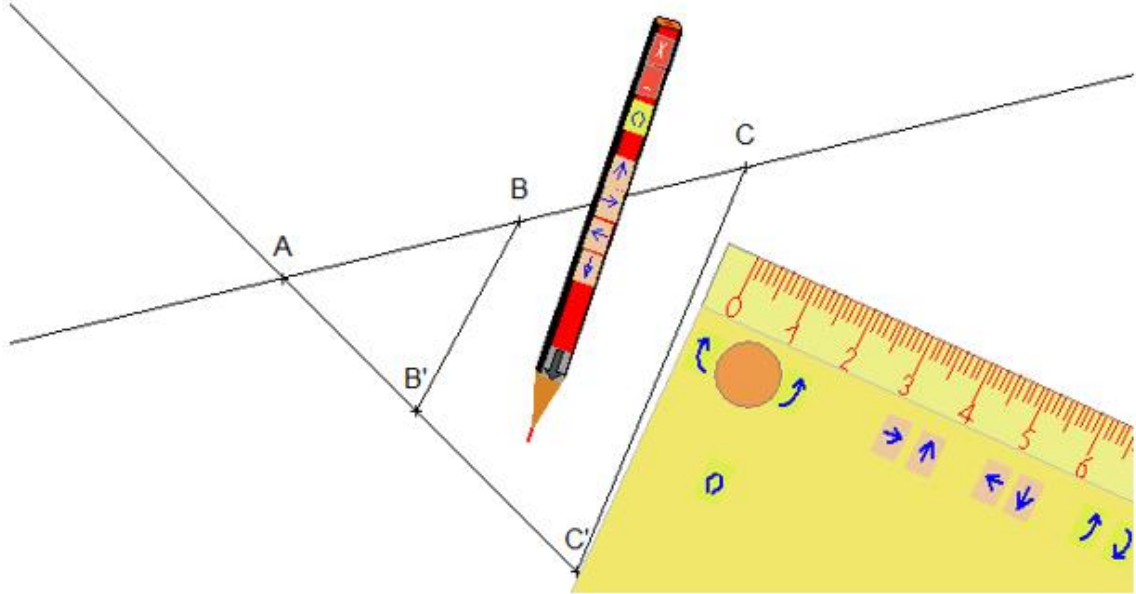


2 cas :

Si : $\overrightarrow{CD} = k \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{C'D'} = k \overrightarrow{A'B'}$



3 cas : si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB'}$



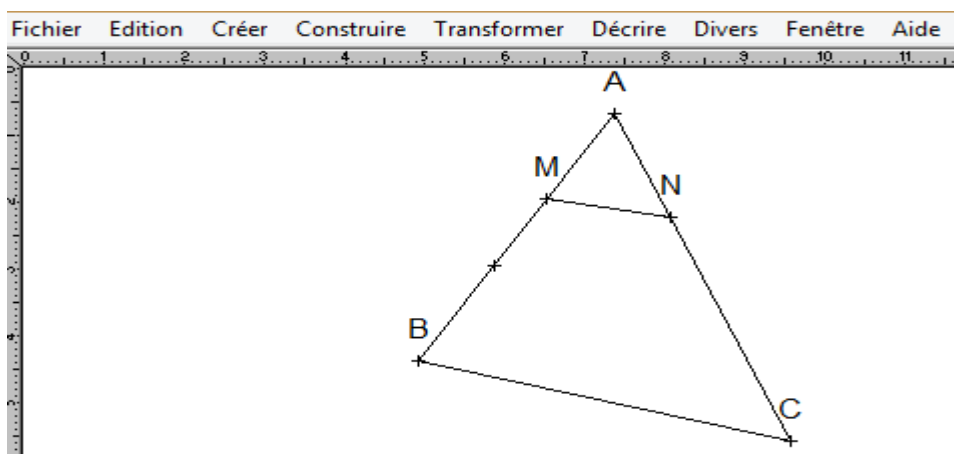
Exercice résolu :

Soit ABC un triangle et $M \in [AB]$ tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et N le projeté de M sur (AC) parallèlement à (BC) .

Montrons que : $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

- ✓ A est sa propre projection sur (AC) parallèlement à (BC)
- ✓ N est la projection de M sur (AC) parallèlement à (BC)
- ✓ C est la projection de B sur (AC) parallèlement à (BC)

Et comme $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **alors** $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **car la projection conserve le coefficient de colinéarité.**



EXERCICES

EXERCICE 1 :

ABC un triangle et E un point vérifiant $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

1. Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$
2. Soit F le projeté de E sur (AC) parallèlement à (BC) . Montrer que $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AC}$

EXERCICE 2 :

$ABCD$ est un trapèze tel que $(AB) \parallel (CD)$ et $AB < CD$. I le point d'intersection de ses diagonales

- J est le projeté de I sur (AB) parallèlement à (BC) .
 - K est le projeté de I sur (AD) parallèlement à (BC) .
1. Comparer $\frac{AJ}{AB}$ et $\frac{AI}{AC}$
 2. Montrer que $(JK) \parallel (BD)$.

EXERCICE 3 :

ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$. Soit D un point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AA'}$.

1. Construire les points E et F tel que E est le projeté de D sur (BC) parallèlement à (AB) et F est le projeté de D sur (BC) parallèlement à (AC) .
2. Montrer que $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CA'}$

3. En déduire que A est le milieu de $[EF]$

