

Ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$.**Exercice: 1.**

Dans chaque cas, a et b sont deux réels strictement positifs.

Comparer A et B en étudiant le signe de $A - B$.

$$1) A = ab - 1 \quad \text{et} \quad B = (a + 1)(b + 1) \quad 2) A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad B = 2.$$

$$3) A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad B = \frac{4}{a + b} \quad 4) A = \frac{7a + 2b}{7a} \quad \text{et} \quad B = \frac{8b}{7a + 2b}$$

Exercice: 2.

Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$

$$a) \text{ Montrer que } \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}.$$

$$b) \text{ Comparer } \sqrt{x^2 + 1} - x \quad \text{et} \quad \frac{1}{2x}.$$

Exercice: 3.

$$1) \text{ Comparer les deux nombres } 10\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 12\sqrt{2}.$$

$$2) \text{ En déduire une comparaison des deux nombres } \left(\frac{1}{1 - 12\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{1 - 10\sqrt{3}}\right)^2.$$

Exercice: 4.

On considère les deux nombres : $x = 4\sqrt{48} + \sqrt{3} + \sqrt{32}$ et $y = \sqrt{50} + 2\sqrt{18} + 4\sqrt{27}$

$$1) \text{ Montrer que } x - y = 5\sqrt{3} - 7\sqrt{2}. \quad 2) \text{ En déduire une comparaison entre } x \text{ et } y.$$

Exercice: 5.

Soient x et y deux réels tels que $x > 0$ et $y < 0$. On pose $A = \frac{9x - 4y}{3x - 2y}$.

Montrer que $A \in]2, 3[$.

Exercice: 6.

Soient x et y deux réels tels que $-3 \leq x \leq 2$ et $-1 \leq y \leq 3$.

Montrer que $-28 \leq x^2 - 2y^2 - 5x \leq 24$.

Exercice: 7.

Soient $-2 < a < -1$ et $-1 < b < 2$. On pose $E = 4a^2 + 4a - b^2 + 2b - 3$.

1) Donner un encadrement de E .

2) Vérifier que $E = (2a + 1)^2 - (b - 1)^2 - 3$.

3) Donner un autre encadrement de E .

4) Comparer les deux encadrements précédents de E .

Exercice: 8.

Soient x et y deux réels tels que : $x \geq \frac{1}{2}$ et $y \leq 1$ et $x - y = 3$.

$$1) \text{ Calculer } A = \sqrt{(2x - 1)^2} + \sqrt{(2y - 2)^2}.$$

$$2) \text{ Montrer que } \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ et } \frac{-5}{2} \leq y \leq 1.$$

$$3) \text{ Donner la valeur de l'expression } B = |x + y - 5| + |x + y + 2|.$$

Exercice: 9.

À l'aide d'un schéma, déterminer l'intersection et la réunion des deux intervalles donnés :

- a) $I = [-10, 2]$ et $J = [-3, 7]$ b) $I =]-\infty, 3]$ et $J = [-6, +\infty[$
 c) $I = [7, +\infty[$ et $J = [-5, +\infty[$ d) $I =]3, 18]$ et $J =]17, 20]$
 e) $I = \left[-\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right]$ et $J = \left[\frac{5}{7}, 1\right]$ f) $I = \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right]$ et $J = \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$

Exercice: 10.

Traduire chaque intervalle à l'aide d'une valeur absolue :

- a) $x \in [2, 12]$ b) $x \in]-2, 9[$ c) $x \in]-\infty, 2[\cup]10, +\infty[$ d) $x \in]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{4}{7}, +\infty[$.

Exercice: 11.

Trouver les réels x satisfaisant à la condition indiquée :

- a) $|x - 3| = 2$ b) $|4 - 3x| = 5$ c) $|x + 4| \leq 1$ d) $|x + \frac{1}{2}| \geq \frac{2}{3}$
 e) $\frac{1}{2} \leq |x - \frac{1}{4}| \leq 2$ f) $|2x - 1| = |3x + 4|$ g) $|x + 5| + |-2x + 1| = 0$.

Exercice: 12.

Soient x et y deux réels tels que $|x - \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2}$ et $2\sqrt{2} \leq \sqrt{y+7} \leq 3$.

1. Montrer que $-1 \leq x \leq 2$ et $1 \leq y \leq 2$.
2. Donner un encadrement de $\frac{x+2}{y}$.
3. Calculer le nombre $A = |2x - 3y - 1| + |2x - 3y + 8|$.

Exercice: 13.

Soit x un nombre réel tel que $|x - 1| < 1$. Montrer $|x^2 + 5x - 6| \leq 8|x - 1|$.

Exercice: 14.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $E = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

- 1) Montrer que $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1}$.
- 2) Montrer que $\sqrt{1+x^2} + 1 \geq 2$, puis en déduire que $|E - \frac{1}{x}| \leq \frac{1}{2}|x|$.
- 3) Déterminer une valeur approchée de $\frac{\sqrt{1,0001}}{0,01}$ d'amplitude 5×10^{-3} .

Exercice: 15.

Soit $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$. On pose $A(x) = \frac{2x+3}{x+2}$.

- 1) Donner un encadrement de A .
- 2) a) Déterminer les réels a et b tels que $A(x) = a + \frac{b}{x+2}$.
 b) Déterminer un autre encadrement de A .
- 3) Indiquer la meilleure approximation de A .

Exercice: 16.

On pose $A = \sqrt{x^2 + 1} - |x|$ et $B = \sqrt{x^2 + 1} + |x|$

1) Montrer que $A > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; puis en déduire que $B > 2|x|$.

2) Calculer $A \times B$, puis en déduire que $A < \frac{1}{2|x|}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

3) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$; on a $|x| < \sqrt{x^2 + 1} < |x| + \frac{1}{2|x|}$.

4) Donner un encadrement de $\frac{\sqrt{122}}{3}$ d'amplitude $\frac{1}{66}$.

Exercice: 17.

1) Montrer que $|(1 - 2x)^3 - (1 - 6x)| = x^2|12 - 8x|$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Supposons que $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

a) Montrer que $|12 - 8x| \leq 16$.

b) En déduire que $|(1 - 2x)^3 - (1 - 6x)| \leq 16x^2$.

c) Déterminer une valeur approché de $0,9998^3$ d'amplitude 16×10^{-8} .

Exercice: 18. (Quelques inégalités très importantes.)

Soient x , y et z des réels strictement positifs. Montrer que :

1. $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$.

2. $(x + y)(x + z)(y + z) \geq 8xyz$.

3. $(1 + x)(1 + y) \geq 4\sqrt{xy}$.

4. $x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6$.

5. $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$.

6. Si $x + y = 1$, alors :

a) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$

b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Bon courage.