

Calcul vectoriel dans le plan.

Exercice: 1.

Soient A, B, C, D et E cinq points quelconques du plan.

Simplifier au maximum les expressions suivantes (sans faire de dessin), en utilisant les relations de Chasles :

$$\vec{U} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} ; \quad \vec{V} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}.$$

$$\vec{W} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DB} ; \quad \vec{X} = 87\overrightarrow{AC} + 82\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{AD}.$$

Exercice: 2.

ABC un triangle. Dans chaque cas ci-dessous, exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis construire M .

a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$

b) $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

d) $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{AC}$

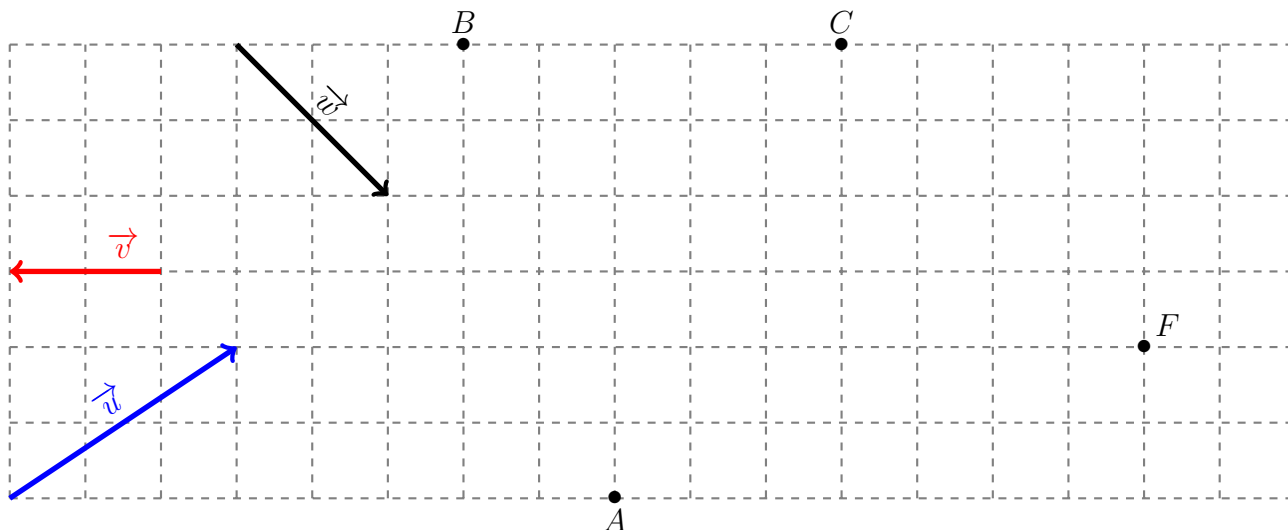
e) $\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA}$

f) $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{AB}$

Exercice: 3.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ trois vecteurs. Placer les points M, N, L et G définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \vec{u} + 2\vec{v} ; \quad \overrightarrow{BN} = \vec{w} - 3\vec{v} ; \quad \overrightarrow{CL} = \vec{w} - \vec{v} ; \quad \overrightarrow{FG} = -\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}.$$

**Exercice: 4.**

Soient trois points A, B et C non alignés. Soit le point G défini par la relation

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Démontrer que pour tout point M du plan, on a la relation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Exercice: 5.

Soient A, B et M trois points tels que $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.
Montrer que le point M appartient à la droite (AB) .

Exercice: 6.

Soient ABC un triangle et E et F les points définis par $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

- ❶ Faire une figure.
- ❷ Ecrire $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- ❸ En déduire que (BF) et (EC) sont parallèles.

Exercice: 7.

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs qui vérifient :
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \\ 2\vec{u} - \vec{v} + 4\vec{w} = \vec{0} \end{cases}$$

Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires avec $\vec{w}$.

Exercice: 8.

Soient ABC un triangle et M un point tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

- ❶ Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- ❷ Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que M est le milieu de $[IC]$.

Exercice: 9.

ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et J et K deux points tels que :

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}.$$

- ❶ Construire J et K .
- ❷ Montrer que $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
- ❸ Conclure que les points I, J , et K sont alignés.

Exercice: 10.

Soient $\vec{i}, \vec{j}$ deux vecteurs. On pose $\vec{a} = \sqrt{3}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$ et $\vec{b} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$.

- ❶ Calculer $\sqrt{2}\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}$.
- ❷ Écrire $\vec{i}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice: 11.

Soient ABC un triangle, M et N les points définis par :

$$\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Le but est de montrer par deux méthodes différentes l'alignement des points A, M , et N .

❑ **Avec un repère.** On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- ❶ Déterminer les coordonnées de A, B , et C .

❷ Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$.

❸ Conclure.

❑ **Calculs vectoriels.**

❶ Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

❷ En déduire que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires. Conclure.

Exercice: 12.

ABC est un triangle.

❶ Placer les points D, E et F tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{BE} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{CB} \text{ et } F \text{ est le milieu de } [AC].$$

❷ Exprimer, en justifiant, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{FE}$.

❸ a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire un réel k tel que $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AE}$.

c) Que peut-on alors conclure ?

❹ a) Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b) Placer le point G symétrique de F par rapport à C .

$$\text{Montrer que } \overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} \text{ puis que } \overrightarrow{GD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

c) En déduire la nature du quadrilatère $AMDG$.

Exercice: 13.

ABC est un triangle.

❶ Placer les points H et G vérifiant les relations suivantes :

$$\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BG} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

❷ On choisit le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

a) Donner les coordonnées des points A, B et C dans ce repère.

c) Déterminer les coordonnées des points H et G dans ce repère.

❸ Les points A, G et H sont-ils alignés ?

Bon courage.