

Chapitre 12

Vecteurs de l'espace

1 Vecteurs de l'Espace

1.1 Extension de la notion de vecteur à l'Espace

Dans le plan, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- sa **direction** (la droite (AB)) ;
- son **sens** (du point A vers le point B) ;
- sa **longueur** ou **norme** (la distance AB).

Cette notion se généralise sans problème à l'Espace, avec les mêmes propriétés. Par exemple :

Propriété : Égalité de vecteurs

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

1.2 Calcul vectoriel dans l'Espace

L'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel sont définies comme dans le plan et ont les mêmes propriétés. Par exemple :

Propriété 1 : Relation de Chasles

Pour tous points A , B et C de l'Espace : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (voir figure 1).

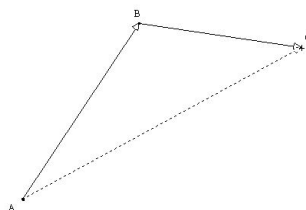


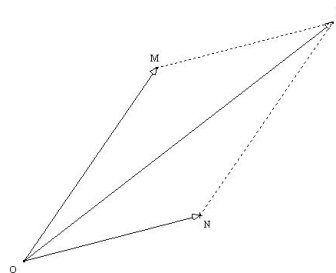
FIG. 1 – Relation de Chasles

Propriété 2 : Règle du parallélogramme

$OMRN$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ (voir figure 2)

Remarques :

1. Ces deux propriétés donnent les deux manières de construire une somme vectorielle (« bout-à-bout » ou à l'aide d'un parallélogramme).
2. Les règles de calculs sur les sommes de vecteurs et sur les multiplications de vecteurs par un réel sont les mêmes que sur les nombres.



1.3 Colinéarité, applications

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel k (c'est-à-dire $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$).

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont **même direction**.

Applications :

- Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.
- Les points A , B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

Exercice :

Soit $ABCD$ un tétraèdre et K , L et M les points de l'Espace définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

1. Faire une figure.
2. Sur quelle face du tétraèdre se situe le point K ? le point L ?
3. (a) Montrer que les droites (KL) et (BD) sont parallèles.
(b) Montrer que K , M et B sont alignés.
(c) Montrer que L , M et D sont alignés.
(d) Que peut-on en déduire pour les points M , K , L , B et D ?

1.4 Coplanarité

Définitions :

1. On dit que quatre points A , B , C et D de l'espace sont **coplanaires** s'ils sont dans un même plan.
2. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Il existe quatre points A , B , C et D de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si les quatre points A , B , C et D le sont.

Remarque : Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**, les droites (AB) et (CD) sont parallèles et, donc, les points A , B , C et D sont **coplanaires**.

Théorème : (admis)

1. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.
Alors, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

2. Soit A , B , C et D quatre points de l'espace, tels que A , B et C ne soient pas alignés.
Alors, les points A , B , C et D sont **coplanaires** si et seulement si il existe deux réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$